FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH
Zentralinstitut für Angewandte Mathematik
D-52425 Jülich, Tel. (02461) 61-6402

Interner Bericht

Die erste Fourierreihe

Edgar M. E. Wermuth

KFA-ZAM-IB-9119

Dezember 1991
(Stand 15.03.93)

Math. Semesterberichte 40 (1993), pp. 133-145

Math. Semesterber. (1993) 40: 133–145

Die erste Fourierreihe

EDGAR M. E. WERMUTH

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik, Forschungszentrum Jülich
D-52425 Jülich, Deutschland; e-mail: e.wermuth @ kfa-juelich.de

Zusammenfassung. Nach einer knappen historischen Skizze zur Entstehung der Fourierreihen wird für die „erste Fourierreihe", die Euler erstmals 1744 erwähnte, ein möglichst einfacher und elementarer Konvergenzbeweis gegeben. Außerdem werden einige an diese bemerkenswerte Reihe anknüpfende mathematische Sachverhalte, insbesondere das Gibbs-Phänomen und die Eulersche Summenformel, in gegenüber üblichen Darstellungen vereinfachter bzw. um wichtige Aspekte ergänzter Weise diskutiert.

1. Nicht selten tragen mathematische Begriffe oder Methoden gar nicht den Namen ihres eigentlichen Erfinders, sondern den Namen eines Forschers, durch dessen Werke sie — manchmal eher zufällig, manchmal, weil die Köpfe inzwischen aufnahmebereiter für diese Gedanken waren — einem breiteren Publikum bekannt wurden.

Die Fourierreihen aber sind völlig zu Recht benannt worden nach Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), dem Schneidersohn aus Auxerre, der in Paris Assistent des berühmten Joseph Louis Lagrange (1736–1813, aus Turin stammend) wurde, als Verehrer Napoleons diesen 1798 für drei Jahre nach Ägypten begleitete und, nach Paris zurückgekehrt, neben seinen vielfältigen administrativen Aufgaben sich wissenschaftlich intensiv mit dem Phänomen der Wärme befaßte. Frucht dieser Studien, die ihm 1812 den Preis der Pariser Akademie der Wissenschaften eintrugen, war sein epochemachendes Werk „Théorie analytique de la chaleur" (1822).

Als analytisches Hauptwerkzeug bei diesen Untersuchungen benutzte Fourier die Darstellung sozusagen x-beliebiger, auch unstetig zusammengestückelter Funktionen durch eine unendliche Reihe aus Sinus- und Cosinusfunktionen, in heutiger Schreibweise:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1}$$

Wenige Jahrzehnte zuvor war eine solche Darstellbarkeit „willkürlicher" Funktionen heftig umstritten gewesen. Während Daniel Bernoulli glaubte, daß man beliebige Anfangsauslenkungen einer schwingenden Saite durch eine trigonometrische Reihe der Form (1) darstellen könne, hielt Leonhard Euler (1707–1783, der größte Mathematiker und Wissenschaftler überhaupt des 18. Jahrhunderts), der 1749 als erster solche Reihen zur Beschreibung von Saitenschwingungen benutzte, eine 1747 von d'Alembert aufgestellte andere Formel für allgemeiner (siehe [21], S. 351–368).

Obwohl also Euler die Tragweite von Reihen der Form (1) eher skeptisch beurteilte, war er es, der 1777, schon seit Jahren vollständig erblindet, die allgemeine Beziehung zwischen den Koeffizienten a_n, b_n und der darzustellenden Funktion f formulierte (siehe [18], S. 138ff.; bei Euler kommt allerdings nur die erste der beiden Formeln explizit vor):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{2}$$

Merkwürdig, daß Euler nicht auf den Gedanken kam, daß diese Formeln ja für nahezu beliebige Funktionen sinnvoll sind! (Siehe auch [6], S. 30f.)

So blieb es Fourier vorbehalten, durch seine Untersuchungen zur Wärmeleitung zu demonstrieren, welch allgemeines und mächtiges Werkzeug die Reihen der Form (1) in der Hand des Analytikers sind. Ähnlich hatte Isaac Newton, der 1666 die binomische Reihe

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots \tag{3}$$

entdeckte, dem Gebrauch der Potenzreihen in den mathematischen Wissenschaften die Bahn gebrochen (siehe [18], S. 20ff.). Die Potenzreihen aber waren eingeschränkt auf die Darstellung unendlich glatter Funktionen, während Fouriers Reihen durch ihre fast grenzenlose Allgemeinheit den Anstoß gaben zur Formulierung des allgemeinen modernen Funktionsbegriffs (Dirichlet, 1837). Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), preußischer Hugenotte, geboren in Düren/Rhld., zeitweilig Schüler von Fourier in Paris und später Nachfolger von Gauß in Göttingen, gab 1828 den ersten strengen Konvergenzbeweis für die Fourierschen Reihen, im wesentlichen das heutige „Dirichlet/Jordan-Konvergenzkriterium". (Nur zwei Jahre eher publizierte Niels Henrik Abel (1802–1829) den ersten vollständigen Konvergenzbeweis für Newtons binomische Reihe.)

Die aufblühende Fourier-Analysis lieferte die entscheidenden Impulse zur Entstehung der allgemeinen Mengenlehre (G. Cantor, 1873) und des modernen Integralbegriffs (Riemann, 1854; Lebesgue, 1902) und entwickelte sich schließlich zu einem Herzstück der reinen wie der angewandten Mathematik.

Als erste Fourierreihe gilt

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots = \frac{\pi - x}{2} \qquad (0 < x < 2\pi), \tag{4}$$

eine Formel, die Euler erstmals 1744 — also schon einige Jahre vor den Diskussionen über die schwingende Saite — in einem Brief Christian Goldbach mitteilte, ohne einen Beweis anzugeben; den hat er erst 1755 in seinem Lehrbuch der Differentialrechnung publiziert (s. [5], S. 875f.).

Um die Eigenschaften dieser bemerkenswerten Reihe soll es im vorliegenden Artikel gehen.

2. Wir schildern zunächst, mit heutigen Bezeichnungen, Eulers Lehrbuch-Beweis der Formel (4): Ausgehend von der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r \cdot e^{ix})^n = \frac{1}{1 - r \cdot e^{ix}}$$

und ihrem Realteil

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}, \tag{5}$$

ergibt sich für $r = 1$

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cdots = \frac{1}{2},$$

also

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots = -\frac{1}{2};$$

und indem man dies von π bis x integriert, erhält man

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots = \frac{\pi - x}{2}.$$

Der Haken bei dieser Herleitung:
Die Reihe

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots$$

ist divergent für beliebige $x \in \mathbf{R}$!

Eulers Herleitung läßt sich aber — wie so manche scheinbar falsche Argumentation bei Euler — ohne weiteres in einen echten Beweis umwandeln, und zwar, indem man statt unendlicher Reihen deren endliche Partialsummen betrachtet:
Der Realteil der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{N} e^{inx} = \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

ergibt

$$\sum_{n=0}^{N} \cos nx = \frac{1}{2} + \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{6}$$

Gültig ist die Formel zunächst für $0 < x < 2\pi$, mit stetiger Ergänzung gilt sie aber auch für $x = 0$, $x = 2\pi$ und damit letztlich für alle $x \in \mathbf{R}$.

Indem wir nun (6) wieder gliedweise integrieren, erhalten wir mit partieller Integration für $0 < x < 2\pi$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} &= \int_{\pi}^{x} \sum_{n=1}^{N} \cos nt\,dt = \int_{\pi}^{x} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\right) dt \\ &= \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2N+1}\left(-\frac{\cos(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{x} \frac{\cos\frac{t}{2}\cos(N+\frac{1}{2})t}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right).\end{aligned}$$

Also folgt (das letzte Integral wird mit dem erweiterten Mittelwertsatz abgeschätzt)

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} - \frac{\pi - x}{2}\right| \le \frac{1}{2N+1} \cdot \left(\frac{2}{\sin\frac{x}{2}} - 1\right) \tag{7}$$

für $0 < x < 2\pi$, womit Eulers Formel aus dem Brief an Goldbach bewiesen ist.

Man kann (4) auch direkter, aber dafür weniger elementar, aus (5) herleiten:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nx}{n} &= \int_{\pi}^{x} \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2}\,dt + \pi - x \\ &= \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2}(1 - r^2)\int_{\pi}^{x} \frac{dt}{1 - 2r\cos t + r^2}.\end{aligned}$$

Da $1 - 2r\cos t + r^2 = (1 - r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t \ge (1 - r\cos x)^2$ für t zwischen π und x und $x \in (0, 2\pi)$, folgt

$$\lim_{r\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Also gilt (4) nach **Littlewoods Taubersatz** ([22], S. 233ff.):
Aus $\lim_{r\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = s$ *und* $a_n = O(\frac{1}{n})$ *für* $n \to \infty$ *folgt* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

3. Nebenbei ergibt sich aus den obigen Rechnungen auch ein einfacher Beweis der Identität

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Es ist

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{N} \cos nt\,dt = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx \\ &= -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{x}\,dx + \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}\right)\sin(N+\frac{1}{2})x\,dx,\end{aligned}$$

also

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + \int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(N+\frac{1}{2})x\,dx \tag{9}$$

mit der für $|x| < 2\pi$ stetig differenzierbaren Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} \cdot (\frac{x}{2})^{2n+1}}{2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (\frac{x}{2})^{2n}}.$$

Durch partielle Integration des zweiten Integrals in (9) ergibt sich also, daß es ein $O(\frac{1}{N})$-Term ist, weshalb (9) für $N \to \infty$ in (8) übergeht.

Auch die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{10}$$

erhält man leicht aus den bisherigen Rechnungen. Wir integrieren

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2} + \int_{\pi}^{t} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}\, d\tau$$

bzgl. t von π bis x und erhalten mit anschließender partieller Integration

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n - \cos nx}{n^2} &= -\frac{(\pi - x)^2}{4} + \int_{\pi}^{x}\int_{\pi}^{t} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}\, d\tau\, dt \\ &= -\frac{(\pi - x)^2}{4} + x\int_{\pi}^{x} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}\, d\tau - \int_{\pi}^{x} \frac{t\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt.\end{aligned}$$

Für $0 \le x < 2\pi$ verschwinden beide Integrale beim Grenzübergang $N \to \infty$, und es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos nx}{n^2} = -\frac{(\pi - x)^2}{4} \quad (0 \le x < 2\pi).$$

(Noch direkter folgt dies durch gliedweise Integration aus (7), wenn man für $x = 0$ die Stetigkeit der Reihe ausnutzt.)
Für $x = 0$ ergibt sich nun $\sum_{k=1}^{\infty} 2/(2k-1)^2 = \pi^2/4$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \tag{11}$$

und aus $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n)^2 = 1/4 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ folgt $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^2 = 3/4 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ und daher mit (11) auch (10).

Wir halten noch die mitbewiesene Identität $(-1/8 + 1/24 = -1/12)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{(\pi - x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \quad (0 \le x < 2\pi) \tag{12}$$

fest, eine Fourierreihe, aus der die Eulersche Formel (4) durch gliedweise Differentiation entsteht.

4. Die Fourierreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$ ist ein Beispiel für die bemerkenswerte, Euler selbst noch nicht recht glaubhaft erscheinende Tatsache, daß durch solche Reihen aus unendlich glatten Funktionen beliebig „zusammengestückelte“ Funktionen, auch solche mit Sprüngen, dargestellt werden können. Eulers Reihe stellt eine „Sägezahnfunktion“ dar (Abb. 1).

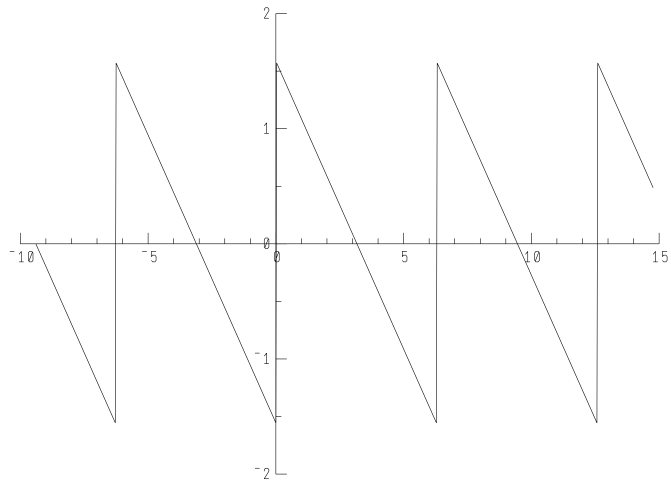

Abb. 1

Die Approximation des Funktionsverlaufs in der Umgebung der Sprungstelle durch die Partialsummen der Fourierreihe ist naturgemäß nicht *gleichmäßig*; es tritt vielmehr ein charakteristisches Überschwungverhalten auf, das sogenannte *Gibbssche Phänomen*:

$$\begin{aligned}
S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} &= \frac{\pi - x}{2} + \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \\
&= \frac{\pi - x}{2} + \int_{0}^{x} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt - \int_{0}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nt\right)\,dt \\
&= \frac{\pi - x}{2} + \int_{0}^{x} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{t}\,dt + \int_{0}^{x} \varphi(t)\sin(N+\frac{1}{2})t\,dt - \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi - x}{2} + \int_{0}^{(N+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{\pi}{2} + O(\frac{1}{N}). \qquad (13)
\end{aligned}$$

Dabei ist φ die schon in (9) auftretende stetig differenzierbare Funktion, weshalb das φ-Integral im Bereich $|x| \leq \pi$ gleichmäßig als $O(\frac{1}{N})$-Term abgeschätzt werden kann (partielle Integration). Die Funktion $\int_0^x \sin t/t\,dt - \pi/2$ hat bei π ein Maximum mit Wert

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 0.1789797\ldots$$

und pendelt sich für $x \to \infty$ auf den Wert 0 ein (Abb. 2).

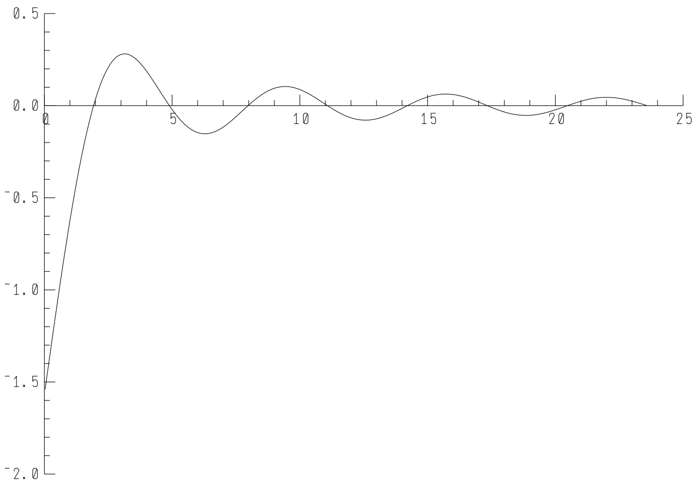

Abb. 2

Nach (13) ist $S_N(x)$ für $0 < x < \pi$ die Summe aus der Grenzfunktion $(\pi - x)/2$, der $(N + \frac{1}{2})$-fach „zusammengeschobenen“ Funktion $\int_0^x \sin t/t\, dt - \pi/2$ und einem gleichmäßig mit $1/N$ gegen 0 strebenden Rest (Abb. 3).

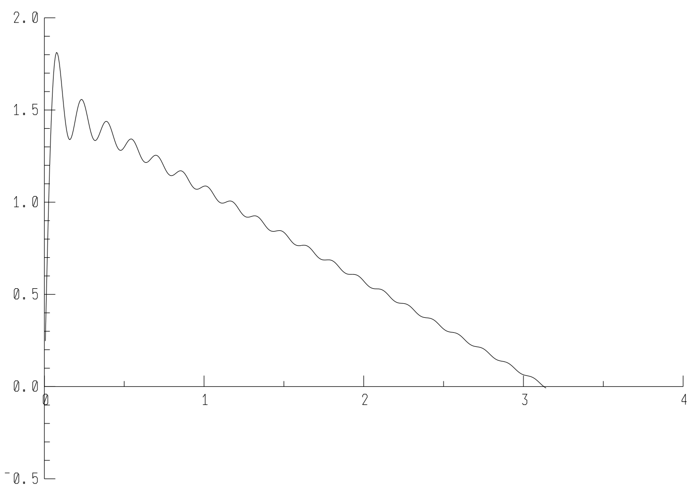

Abb. 3

Wenn auch an einer festen Stelle $x \in (0, 2\pi)$ die Werte von $S_N(x)$ für $N \to \infty$ gegen $(\pi - x)/2$ streben, gilt dennoch

$$S_N\Big(\frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}\Big) \to \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \cdot 1.1789797\ldots$$

Dieses Überschwingen um ca. 17.9% ist ein Phänomen, das stets bei Sprungstellen von Fourierreihen stückweise glatter Funktionen auftritt; die Analyse des Allgemeinfalls läßt sich ganz einfach auf das diskutierte Beispiel der Eulerschen Reihe zurückführen, indem man benutzt, daß die Fourierreihe einer *stetigen* stückweise glatten Funktion gleichmäßig gegen die Funktion konvergiert (siehe z. B. [9], S. 482 u. S. 487ff.). (Entdeckt hat das Überschwingverhalten der durch seinen Beitrag zum experimentellen Fundament der Relativitätstheorie berühmte amerikanische Physiker Albert A. Michelson, der einen „harmonischen Analysator“, ein Gerät zur Bestimmung von Fourierkoeffizienten, konstruiert hatte, und aufgrund dieses Phänomens glaubte, sein Apparat sei fehlerhaft. Er berichtete seinem großen Theoretiker-Kollegen Josiah Willard Gibbs davon, und dieser lieferte (im Jahre 1899) die mathematische Erklärung. Das Gibbssche Phänomen wurde aber schon 50 Jahre früher von Henry Wilbraham beschrieben; vgl. z. B. [15], S. 62ff., ferner [20], S. 145ff.)

5. Wir schildern abschließend den Zusammenhang zwischen der Eulerschen Fourierreihe (4) und einer fundamentalen Formel der Analysis, der ebenfalls von Euler entdeckten *Eulerschen Summenformel*; diese ermöglicht es, die Berechnung der Summe $\sum_{n=0}^{N} f(n)$ auf diejenige des Integrals $\int_0^N f(x)\,dx$ zurückzuführen (oder umgekehrt).

Zunächst leiten wir die Formel nach Lagrangeschem Vorbild rein formal algebraisch her, ohne Rücksicht auf Konvergenzfragen (vgl. [10], S. 456f.). Nach Taylor gilt, wenn wir unter D den linearen Operator der Differentiation verstehen, also $D := \frac{d}{dx}$ setzen,

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(hD)^n}{n!} f(x) = e^{hD} f(x)$$

und daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x+nh) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{hD}\right)^n f(x) = \frac{1}{1-e^{hD}} f(x) = -\frac{1}{hD} \frac{hD}{e^{hD}-1} f(x).$$

Nun benutzen wir die Darstellung (mit den *Bernoullischen Zahlen* B_n, vgl. z. B. [10])

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \tag{14}$$

sowie die Tatsache, daß $\int_x^\infty$ die Umkehroperation zu $-D$ ist, und erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x+nh) = \frac{1}{h} \int_x^\infty f(t)\,dt + \frac{1}{2} f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} h^{2n-1} f^{(2n-1)}(x).$$

Durch Differenzbildung schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} f(x+nh) =& \frac{1}{h} \int_x^{x+Nh} f(t)\,dt + \frac{f(x)+f(x+Nh)}{2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} h^{2n-1} \left\{ f^{(2n-1)}(x+Nh) - f^{(2n-1)}(x) \right\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Dies ist die Eulersche Summenformel für den Fall, daß das Restglied gegen 0 strebt, was aber bei vielen interessanten Beispielen gerade *nicht* vorausgesetzt werden kann; im allgemeinen ist die in (15) rechts stehende Reihe gar nicht konvergent. Die mathematisch strenge Eulersche Summenformel — die allerdings noch nicht zu Eulers Zeit formuliert wurde — lautet (mit noch zu spezifizierendem Restglied R_M)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} f(x+nh) =& \frac{1}{h} \int_x^{x+Nh} f(t)\,dt + \frac{f(x)+f(x+Nh)}{2} \\ &+ \sum_{m=1}^{M} \frac{B_{2m}}{(2m)!} h^{2m-1} \left\{ f^{(2m-1)}(x+Nh) - f^{(2m-1)}(x) \right\} + R_M.\end{aligned} \tag{16}$$

Wir skizzieren nun ihre exakte Herleitung (bei der die Bernoullischen Zahlen nicht als bekannt vorausgesetzt werden, sondern sich auf natürliche Weise ergeben).

Ausgangspunkt ist der Fehlerausdruck für die *Trapezregel*, den man durch partielle Integration erhält:

$$\frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) - \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx \tag{17}$$

und allgemeiner

$$\frac{1}{2}\big(f(n)+f(n+1)\big) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_n^{n+1} \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx;$$

Aufsummieren ergibt

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^N f(x)\,dx + \frac{f(0)+f(N)}{2} + \int_0^N (x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}) f'(x)\,dx. \tag{18}$$

Das ist der Fall $M = 0$ der Eulerschen Summenformel (16) mit $x = 0$ und $h = 1$; durch Umskalieren erfaßt man beliebige x- und h-Werte, weshalb im folgenden stets $x = 0$ und $h = 1$ angenommen wird.

Mittels partieller Integration gelangt man schrittweise zu höheren Ableitungsordnungen im Fehlerintegral; d. h. mit $\varphi_1(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ bildet man sukzessive Funktionen $\varphi_{m+1}(x) = \varphi_{m+1}(0) + \int_0^x \varphi_m(t)\,dt \quad (m = 1, 2, \ldots)$ und erhält die Fehlerintegrale $(-1)^m \int_0^N \varphi_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x)\,dx$. Die Integrationskonstanten wählt man zweckmäßigerweise so („Gleichbehandlung“ aller Intervalle $(n, n+1)$), daß alle φ_m 1-periodisch sind:

- $\varphi_2(x) = \varphi_2(0) + \int_0^x \varphi_1(t)\,dt$ ist stetig und 1-periodisch, da $\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt = 0$;
- analog ist $\varphi_3(x) = \varphi_3(0) + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt$ stetig differenzierbar und 1-periodisch, wenn man $\varphi_2(0)$ so festlegt, daß $\int_0^1 \varphi_2(t)\,dt = 0$; usw.

Man setzt also die φ_m in $[0, 1)$ rekursiv fest gemäß

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad (0 \le x < 1), \\ &\varphi'_{m+1}(x) = \varphi_m(x) \quad (0 \le x < 1), \qquad \int_0^1 \varphi_{m+1}(t)\,dt = 0 \quad (m \in \mathbf{N}). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Diese Festsetzung ist äquivalent zu einer gewissen *Minimalitätsbedingung*:
Man könnte in (19) die Normierung $\int_0^1 \varphi_{m+1}(t)\,dt = 0$ auch durch die Forderung

$$\int_0^1 \varphi_{m+1}^2(t)\,dt \overset{!}{=} \min$$

ersetzen; denn unterwirft man den Ansatz $\varphi_{m+1}(x) = c + \int_0^x \varphi_m(t)\,dt$ dieser Minimalitätsforderung, ergibt sich $c = -\int_0^1 \big(\int_0^x \varphi_m(t)\,dt\big)\,dx$, wie leicht nachzurechnen ist.

Mit (19) und $\varphi_m(x) = \varphi_m(x - \lfloor x \rfloor) \quad (x \in \mathbf{R})$ erhält man nach insgesamt $M \ge 1$ partiellen Integrationen (fast) die Eulersche Summenformel mit Restglied:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^N f(x)\,dx &+ \frac{f(0)+f(N)}{2} \\ &+ \sum_{m=2}^{M} (-1)^m \varphi_m(0) \left\{ f^{(m-1)}(N) - f^{(m-1)}(0) \right\} \\ &+ (-1)^{M+1} \int_0^N \varphi_M(x) f^{(M)}(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Wegen $\varphi'_{m+1} = \varphi_m$ ergibt sich mit $c_0 := 1, c_k := \varphi_k(0) \quad (k \ge 1)$ induktiv

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{(m-k)!} x^{m-k} \quad (0 \le x < 1),$$

also mit $\int_0^1 \varphi_m(t)\,dt = 0$ auch $\sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{(m+1-k)!} = 0$; setzt man nun $B_k := k! \cdot c_k$, folgt

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0 \quad (m \ge 2).$$

Die sich aus dieser Rekursion ergebenden rationalen Zahlen heißen *Bernoullische Zahlen.* Daß dabei $B_3 = B_5 = \ldots = 0$, zeigt sich durch Entwickeln von φ_m nach Potenzen von $x - \frac{1}{2}$: Mit (19) folgt induktiv, daß für ungerades (gerades) m nur ungerade (gerade) Potenzen von $x - \frac{1}{2}$ auftreten, also $\varphi_{2\mu+1}(0) = 0$ für $\mu \in \mathbf{N}$ (Periodizität!). Also wird aus (20) schließlich (Übergang von M zu $2M+1$)

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^N f(x)\,dx &+ \frac{f(0)+f(N)}{2} \\ &+ \sum_{m=1}^{M} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left\{f^{(2m-1)}(N) - f^{(2m-1)}(0)\right\} \\ &+ \int_0^N \varphi_{2M+1}(x) f^{(2M+1)}(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Mit dem Restglied

$$R_M = \int_0^N \varphi_{2M+1}(x) f^{(2M+1)}(x)\,dx \tag{22}$$

kann man aber nur etwas anfangen, wenn man φ_{2M+1} abschätzen kann — und *das* leistet Eulers erste Fourierreihe! Nach (4) gilt

$$\varphi_1(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi},$$

nach (12)

$$\varphi_2(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^2},$$

und da man dies wegen gleichmäßiger Konvergenz gliedweise integrieren kann, folgt allgemein

$$\varphi_{2m-1}(x) = 2\cdot(-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{(2n\pi)^{2m-1}}$$

und

$$\varphi_{2m}(x) = 2\cdot(-1)^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^{2m}},$$

also insbesondere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}\cdot B_{2m}}{2\cdot(2m)!}, \tag{23}$$

$$|\varphi_m(x)| \le \frac{2}{(2\pi)^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \quad (m \ge 2)$$

und schließlich

$$\int_0^1 \varphi_m^2(x)\,dx = \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \quad (m \ge 1).$$

(Bei der Herleitung der letzten Formel benutzt man *Orthogonalitätsrelationen:*

$$\int_0^1 \sin 2k\pi x \sin 2l\pi x\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \ne l \\ \frac{1}{2} & \text{für } k = l \end{cases} \quad (k, l \in \mathbf{N})$$

und die entsprechende Formel für den Cosinus.)

Leibniz meinte angesichts der Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}$ ($x = \frac{\pi}{2}$ in (4)), Gott erfreue sich an den ungeraden Zahlen; (23) zeigt, daß ER/SIE auch die geraden mag!

6. Die Kegelschnitte entsprangen den zweckfreien geometrischen Spekulationen griechischer Mathematiker, um dann 2000 Jahre später Kepler zur Beschreibung der Planetenbewegungen zu dienen; der Begriff des unendlichdimensionalen Hilbertraums entstand, anknüpfend an Entwicklungen in der Theorie linearer Integralgleichungen, aus der Neigung der Mathematiker zu verallgemeinernden und vereinheitlichenden abstrakten Begriffsbildungen und wurde — gar nicht so viel später — zum unentbehrlichen Rüstzeug der Atomphysik.

Bei den Fourierreihen war es genau umgekehrt: Sie betraten die mathematische Bühne bei dem Versuch, Naturvorgänge quantitativ zu modellieren — zunächst zaghaft bei Untersuchungen über die schwingende Saite, mit Macht bei Fouriers Forschungen zur Wärmeleitung. Und dann erwies sich dieses neugewonnene Werkzeug nicht nur als ganz wesentliche Bereicherung des Arsenals analytischer Techniken, sondern auch als eine treibende Kraft der allgemeinen Begriffsentwicklung der Mathematik: 1837 benutzte Dirichlet eine abstrakte Form der Fourierentwicklung (Stichwort: Gruppencharaktere), um zu zeigen, daß in einer arithmetischen Folge $(a+bn)_{n\in\mathbf{N}}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a und b stets unendlich viele Primzahlen auftreten (vgl. [15], S. 513–556), und der moderne Funktionsbegriff, die Anfangsgründe der Mengenlehre, der Riemannsche wie der Lebesguesche Integralbegriff, die Theorie der Summierbarkeit verdanken wesentliche Anstöße den bei der Ausgestaltung der Fourierschen Theorie entstandenen Fragestellungen.

Heute, knapp 250 Jahre nach Eulers Brief an Goldbach, sind die Anwendungen wie die Theorie der Fourieranalysis noch längst nicht ans Ende ihrer Entwicklung gekommen. Im Bereich der Anwendungen haben effiziente Verfahren zur Berechnung der diskreten Fouriertransformation zu einer stürmischen Entwicklung in den letzten 25 Jahren geführt. Die schnelle Fouriertransformation (FFT) wird nicht nur überall dort benutzt, wo die Fourieranalysis wesentliches Modellierungswerkzeug ist (also etwa in der Signalverarbeitung und Nachrichtentechnik im weitesten Sinne, vgl. [2], [13], [17]), sondern wurde inzwischen zu einer ubiquitären und vielfach variierten numerischen Grundtechnik (siehe z. B. [3], [4]). Die Theorie der punktweisen Konvergenz, lange Zeit ein Schwerpunkt der theoretischen Forschungen (siehe [24]), hat durch die fundamentalen Resultate von Carleson, Hunt, Kahane und Katznelson ([15], S. 74f., [16], [14]) aus den Jahren 1966/67 eine gewisse Abrundung gefunden; im Mittelpunkt des Interesses stehen heute andere Konvergenzkonzepte und Fragestellungen (siehe z. B. [8], [12]). Dennoch gibt es auch in diesem klassischen Bereich noch wichtige, nicht abschließend geklärte Fragen, z. B. die, in welchem Umfang sich die Konvergenzaussagen für Fourierreihen auf allgemeinere Eigenfunktionsentwicklungen zu Differentialoperatoren übertragen lassen (siehe z. B. [23]).

7. Literatur:

[1] CARL M. BOYER, UTA C. MERZBACH: A History of Mathematics; New York: Wiley 1989

[2] RONALD N. BRACEWELL: The Fourier Transform and its Applications; New York: McGraw-Hill 1986

[3] RONALD N. BRACEWELL: The Hartley Transform; Oxford: Clarendon Press 1986

[4] E. ORAN BRIGHAM: The Fast Fourier Transform and its Applications; Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1988

[5] HEINRICH BURKHARDT: Trigonometrische Reihen und Integrale bis etwa 1850 (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band II 1, S. 819–1354); Leipzig: Teubner 1914/15

[6] JEAN DIEUDONNÉ (Hrsg.): Geschichte der Mathematik 1700–1900; Braunschweig: Vieweg 1985

[7] H. DYM, H. P. MCKEAN: Fourier Series and Integrals; New York: Academic Press 1972

[8] ROBERT E. EDWARDS: Fourier Series – A Modern Introduction, 2 Vols.; New York: Springer 1979, 1982

[9] GREGOR M. FICHTENHOLZ: Differential- und Integralrechnung III; Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979

[10] RONALD L. GRAHAM, DONALD E. KNUTH, OREN PATASHNIK: Concrete Mathematics; Reading (Mass.): Addison-Wesley 1989

[11] GODFREY H. HARDY, WERNER W. ROGOSINSKI: Fourier Series; Cambridge: University Press 1962

[12] HENRY HELSON: Harmonic Analysis; Reading (Mass.): Addison-Wesley 1983

[13] KARL D. KAMMEYER, KRISTIAN KROSCHEL: Digitale Signalverarbeitung; Stuttgart: Teubner 1992

[14] YITZHAK KATZNELSON: An Introduction to Harmonic Analysis; New York: Wiley 1968

[15] THOMAS W. KÖRNER: Fourier Analysis; Cambridge: University Press 1989

[16] C. P. MOZZOCHI: On the Pointwise Convergence of Fourier Series; New York: Springer 1971

[17] ALAN V. OPPENHEIM, ALAN S. WILLSKY: Signale und Systeme; Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft 1992

[18] RICHARD REIFF: Geschichte der unendlichen Reihen; Tübingen: Laupp 1889

[19] WALTER RUDIN: Real and Complex Analysis; New York: McGraw-Hill 1987

[20] DETLEF D. SPALT: Vom Mythos der mathematischen Vernunft; Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1981

[21] DIRK J. STRUIK (ed.): A Source Book in Mathematics 1200–1800; Princeton: University Press 1986

[22] EDWARD C. TITCHMARSH: The Theory of Functions; Oxford: Clarendon Press 1975

[23] EDGAR M. E. WERMUTH: A Generalization of Lebesgue's Convergence Criterion for Fourier Series; Results in Mathematics *15*, 186–195 (1989)

[24] ANTONI ZYGMUND: Trigonometric Series I, II; Cambridge: University Press 1977

Wer als Studierender mehr als nur die erste Fourierreihe kennenlernen möchte, dem seien die Werke Körner[15], Fichtenholz[9], Hardy/Rogosinski[11], Dym/McKean[7] und Helson[12] empfohlen; das bei den letzten dreien erforderliche analytische Handwerkszeug findet man in den hervorragenden Lehrbüchern Titchmarsh[22] und Rudin[19] (die natürlich auch einiges an Fourieranalysis enthalten).